第2回　電子工学で用いる数学と物理現象を結びつける

TDU

本講義「電子工学で用いる数学と物理現象を結びつける」は、受講生の方々から書籍化のご要望が多かったので、電波技術協会報「FORN」 2014年9月号 ～ 2015年5月号に連載記事として執筆しました。電波技術協会殿の御好意により、以下の URL よりその記事を無料でダウンロードできます。

http://amplet.tokyo/nebiya/page09forn.html

初版：2017年4月6日
更新：2017年4月16日

講義資料は
http://amplet.tokyo/tdu
からダウンロードできます.

ユビキタス無線工学
担当：根日屋 英之

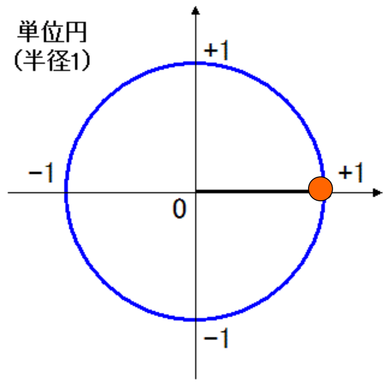
2017年4月13日　　1

数学と物理現象を結びつけるもの
それは半径1の単位円だった.

2017年4月13日　　2

数学と物理現象を結びつけるもの → それは半径1の単位円

TDU

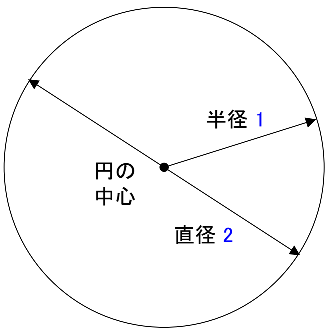


2017年4月13日

全ての基本は半径「1」の円(単位円)から始まる

TDU

単位円



円周の長さ 2π

半径 1 の円(単位円)において

⇒ 直径は 半径 × 2
= 1 × 2
= 2

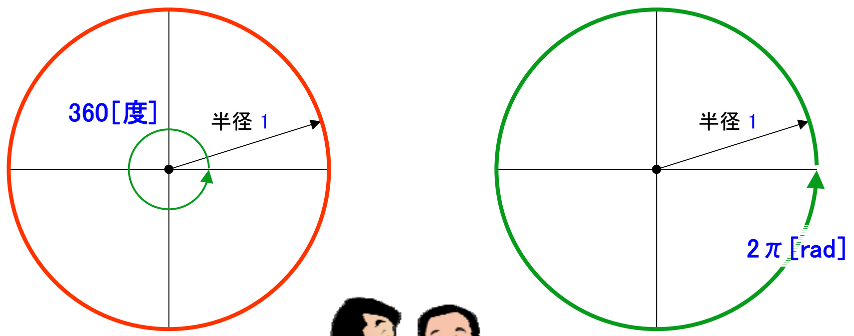
⇒ 円周の長さは 直径×円周率
= 2 × π
= 2 × 3.14

2017年4月13日

数学屋さんと物理屋さんが共通認識を持つには ･･･

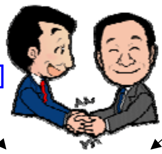
TDU

単位円　　　　単位円



数学屋さんの1周は 360[度]

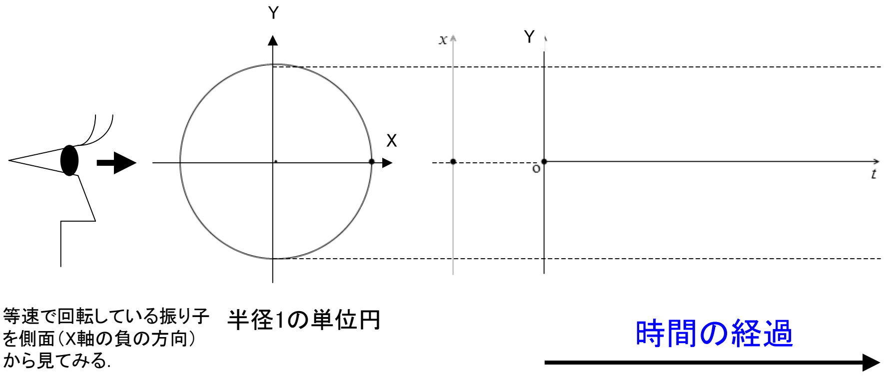
物理屋さんの1周は 2π[rad]



360[度] ＝ 2π[rad]

回転振り子は側面から見ていると どのように見えるか？

TDU



等速で回転している振り子を側面（X軸の負の方向）から見てみる.

半径1の単位円

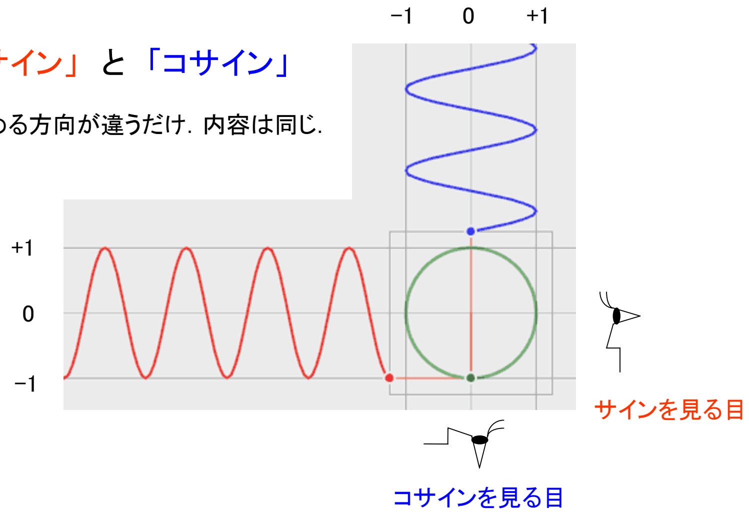
時間の経過

正弦関数(サイン)と余弦関数(コサイン)

TDU

「サイン」 と 「コサイン」

は見つめる方向が違うだけ．内容は同じ．



2017年4月13日

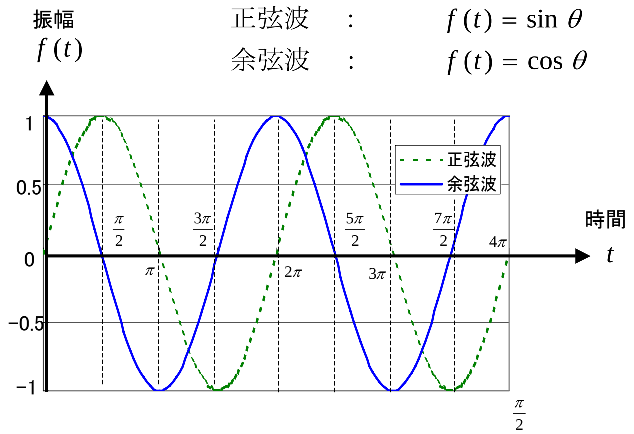
7

正弦関数(正弦波)と余弦関数(余弦波)

TDU

三角関数

正弦波と余弦波のグラフは右図のようになる．



2017年4月13日

8

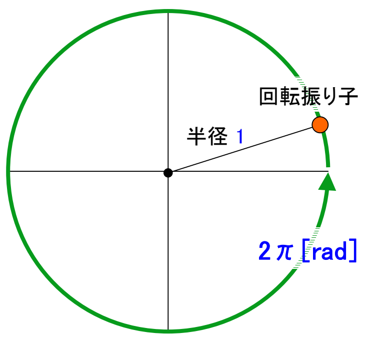
波動関数は「道のり＝速度×時間」

2017年4月13日

周波数 f と 角速度 ω

TDU

単位円



1周は 2π [rad]

回転振り子を考える.

1秒間に回転振り子が f 周 回転すると

その回転振り子が動いた距離 ω は

$\omega = 2\pi$ (1周の長さ) × f (回転)

$= 2\pi f$

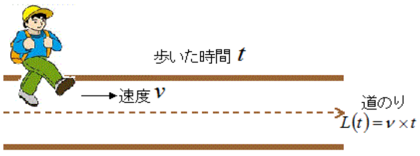
となる.

ここで f を周波数 (単位は Hz),

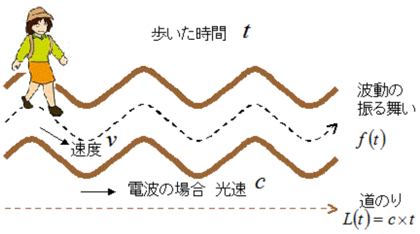
ω を角速度 (単位は rad/秒)と呼ぶ.

2017年4月13日

波動関数は「道のり＝速度×時間」のようなもの



歩いた道のり $L(t)=\underbrace{v}_{\text{速度}}\times\underbrace{t}_{\text{歩いた時間}}$



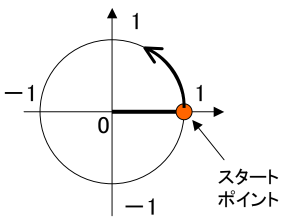
波動の振る舞い $f(t)=\underbrace{\sin}_{\text{くねくね歩いたという意味}}(\underbrace{v}_{\text{速度}}\times\underbrace{t}_{\text{歩いた時間}})$

$$=\sin(\underbrace{2\pi f}_{\text{1秒間に進む距離 ＝ 円周長×周波数}}\times t)$$

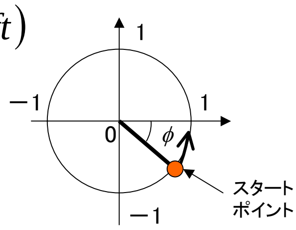
$$=\sin(\underbrace{\omega}_{\text{角速度}}\times\underbrace{t}_{\text{歩いた時間}})$$

歩いた道のり $L(t)=c\times t$

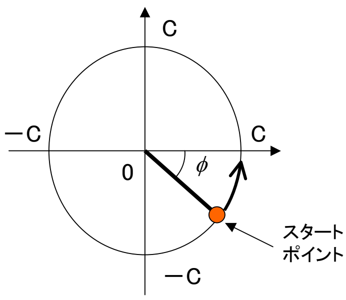
波動関数



$$f(t)=\sin(2\pi ft)$$



$$f(t)=\sin(2\pi ft-\phi)$$

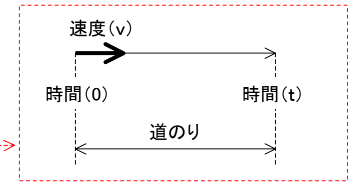


$$f(t)=C\sin(2\pi ft-\phi)$$

波動関数は道のり

［基本］

・ 道のり ＝ 速度（v） × 時間（t）



［波動関数では］

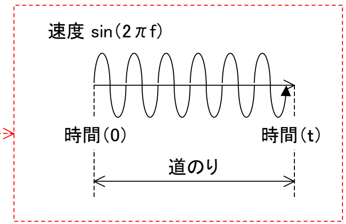
・ 1秒間に進む距離（速度 v ）

＝ 速度単位円1周の長さ（2π） × 1秒間の回転数（周波数 f ）

＝ 2πf

速度（v）

・ t 秒間で進む距離 ＝ 2πft



電波は交流なので、sinで表記すると、

電波の波動関数は、

⇒ 道のり ＝ 速度（v） × 時間（t）

＝ sin(2πft) ＝ sin(ωt)

正弦波の振幅，角周波数，位相の表現

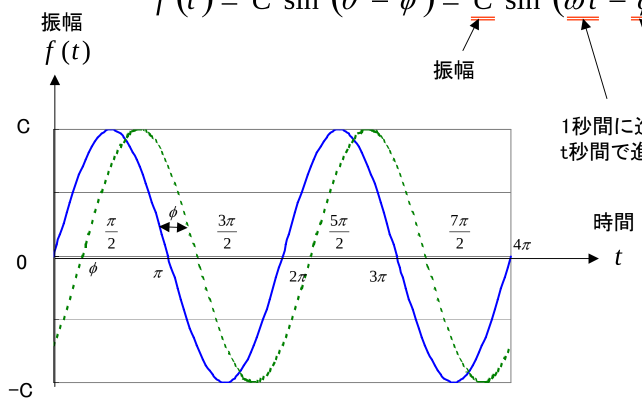
交流信号や高周波信号を正弦波として表現すると，

$$f(t) = C\sin(\theta - \phi) = \underline{C}\sin(\underline{\omega t} - \underline{\phi})$$

振幅

位相

1秒間に進む距離がωなので，
t秒間で進む距離はωt



1-3. 複素表示の世界

複素数って何だ？　単なる表記の手段にすぎない

TDU

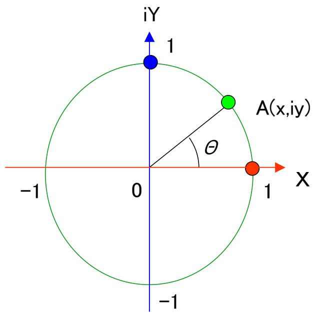
「複素数」　$z = x + iy$

一つの式に二つの世界を同時に書きたいだけ.

実数(x)　・・・　現実の世界

虚数(y)　・・・　空想の世界

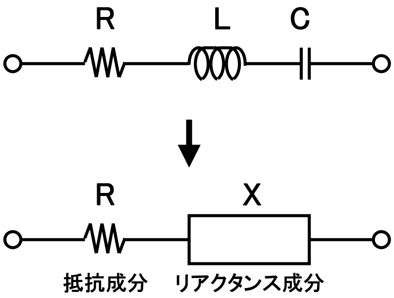
その他の場所　・・・　現実と空想の世界



空想の世界には，空想の世界だよ
という虚数単位をあらわす「i」を
つける.

例えば，インピーダンス

TDU



全ての電子回路はR, L, Cの直列回路の等価回路で表され，

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$
$$= R + jX$$

で与えられる Z をインピーダンスという．ここで，ωは角速度(角周波数)で，f を周波数とすると，ω = 2πf となる．

インピーダンス平面

TDU

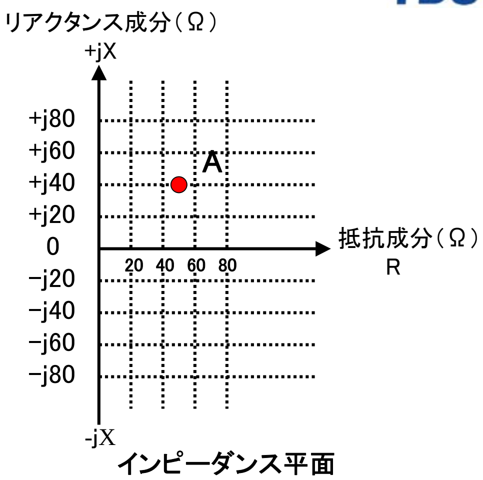
インピーダンス平面の R≧0 の範囲の

R=一定

X=一定

の直線群を平面に写像した図表

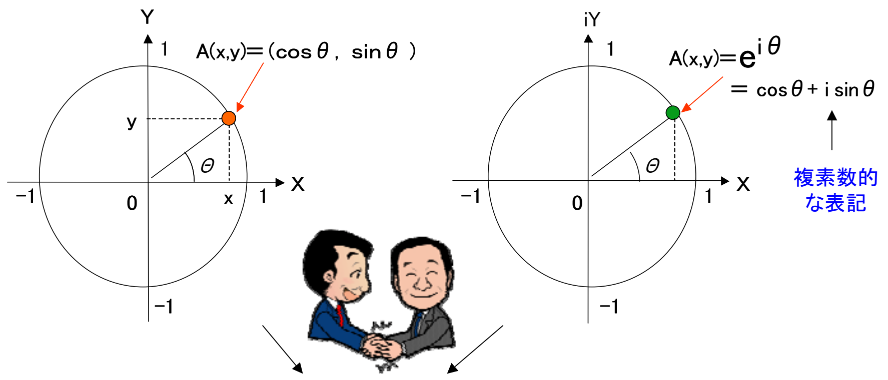
$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$
$$= R + jX$$
$$= 50 + j40$$



根日屋 英之，植竹 古都美：「ユビキタス無線工学と微細RFID」(第2版)(東京電気大学出版局)より転載

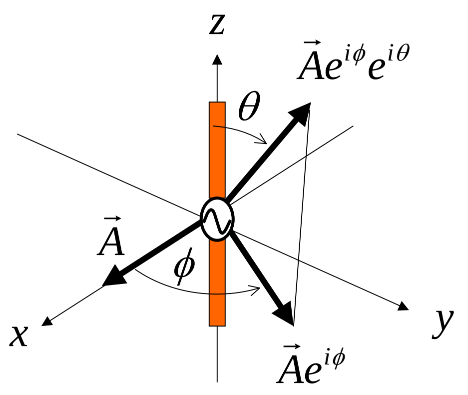
1-4. 角度を簡単に表す

オイラー表記



どちらの表現も振り子 ● の位置を示している.

オイラー表記



オイラー表記は指数関数

更新：2017年4月16日

指数関数の便利なところは、掛け算、割り算を足し算、引き算で計算できる。

$$\begin{cases} e^{a} \times e^{b} = e^{(a+b)} \\ e^{a} \div e^{b} = e^{(a-b)} \end{cases}$$

直流回路のオームの法則

更新：2017年4月16日

TDU

電圧(V) ＝ 電流(I) × 抵抗(R)

電力(W) ＝ 電圧(V) × 電流(I)

＝ 電圧(V)^2 ÷ 抵抗(R)

＝ 電流(I)^2 × 抵抗(R)

交流のインピーダンスの計算

更新：2017年4月16日

TDU

三角関数です！

ピーク電圧： $V_p = \sqrt{2}V_{rms}\sin(\omega t - \phi_V)$

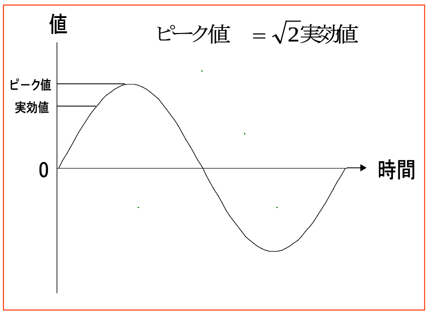
ピーク電流： $I_p = \sqrt{2}I_{rms}\sin(\omega t - \phi_I)$

インピーダンスZは

$$Z = R + jX = \frac{V_p}{I_p} = \frac{\sqrt{2}V_{rms}\sin(\omega t - \phi_V)}{\sqrt{2}I_{rms}\sin(\omega t - \phi_I)}$$

空想の世界

現実の世界



三角関数の計算（割り算）にオイラーの式

TDU

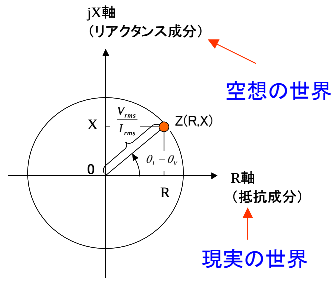
$$Z = R + jX = \frac{V_p}{I_p} = \frac{\sqrt{2}V_{rms}\sin(\omega t - \phi_V)}{\sqrt{2}I_{rms}\sin(\omega t - \phi_I)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}V_{rms}e^{+j(\omega t - \phi_V)}}{\sqrt{2}I_{rms}e^{+j(\omega t - \phi_I)}}$$

$$= \frac{V_{rms}e^{+j(\omega t - \phi_V)}}{I_{rms}e^{+j(\omega t - \phi_I)}}$$

$$= \frac{V_{rms}}{I_{rms}}e^{+j\{(\omega t - \phi_V)-(\omega t - \phi_I)\}}$$

$$= \frac{V_{rms}}{I_{rms}}e^{+j(\phi_I - \phi_V)}$$



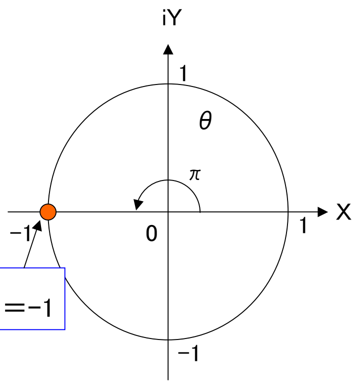
$$\longrightarrow \begin{cases} R = \dfrac{V_{rms}}{I_{rms}}\cos(\phi_I - \phi_V) \\ X = \dfrac{V_{rms}}{I_{rms}}\sin(\phi_I - \phi_V) \end{cases}$$

更新：2017年4月16日

2017年4月13日

オイラーの等式
・・・ それはミステリアスな世界で一番綺麗な公式だった

TDU



$e^{i\pi} = -1$

$e^{i\pi} + 1 = 0$ ・・・ 美しい

e・・・ネピア数：イギリス人 John Napier が発見した無限に続く無理数. e = 2.71828 18284 59045 23536 02874 71352 …

π・・・宇宙の果てまで続いてゆく円周率 ： π＝3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 …

i・・・一つの式の中に二つの現実の世界と空想の異次元の世界を同時に表したいときに，異次元の世界の式をまとめてカッコでくくり，その前に異次元だよと宣言するためにつけた決して正体を現さない虚数（$i^2 = -1$ という現実の世界ではありえない空想の世界だよということを，一番基本的な整数「1」と極性「－」で知らせたい．）

このまったく無関係なような三つの数，eをiπ乗して，それに1を加えるとその結果は0，すなわち「無」になる．このオイラーの等式の等式は，この世で最も美しい数式の一つといわれている．

2017年4月13日

電磁気学も
オームの法則で解けるのか？

2017年4月13日

27

なんでもオームの法則

TDU

電子工学（回路設計）は オームの法則

でほとんど解ける．無線通信で必須の

電磁気学　だって　オームの法則

でほとんど解ける．概して日本の無線業界の技術者は，電子工学と電磁気学は別物と思っているので，電子工学を学んだものは電磁気学が嫌い．電磁気学を学んだものは電子工学が苦手．

2017年4月13日

28

電磁気学もオームの法則でできるのか？

TDU

できる！

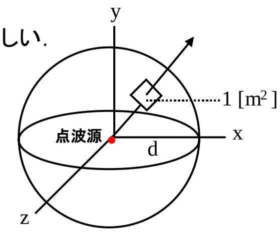
球面において，各部の電力密度 P_d [W/m²] を全球面で積分すると放射源の電力と等しくなる．電界強度を E，磁界を H，自由空間のインピーダンスは 120π ［Ω］ とおくと，E ＝ 120π H なので，

$$P_d = EH = \frac{E^2}{120\pi} = 120\pi H^2 \longleftrightarrow$$

オームの法則

$$P = VI = \frac{V^2}{R} = RI^2$$

となる．等方性アンテナ（点波源）は， P_d はどの点でも等しい．
ここで，半径＝rの球では，その表面積Sは 4πr² なので，



$$P = 4\pi r^2 P_d$$

となる．

2017年4月13日 29

蛇足

TDU

空間インピーダンス η ＝376.730314 が正しくて，120π は近似値．

それを知る学生も大人も少なくて，逆と思っている人が多い．

わずか 0.69/1000 の違いであるが，私も学校で習った記憶が無い．

蛇足：

光速 c＝299,792,458 [m/s] で，人間が透磁率 μ ＝4π ×10⁻⁷ と決めた．

$c = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ より， 誘電率 ε ＝1/（μc²）＝8.85418782×10⁻¹² なので，

$\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon} = 376.730314$ ［Ω］ （あるいは η ＝ μc）と半端な数となる．

＊ 時間も長さも，単位を人間が勝手に決めた．μ だけは数学の美を持たせたけれど，手遅れでした．

2017年4月13日 30